

3

因数分解

素因数分解

整数がいくつかの整数の積で表されるとき、その1つ1つの数を、もとの整数の**因数**という。因数が素数のとき、その因数を**素因数**といい、自然数を素因数の積で表すことを**素因数分解**するという。

復習 2, 3, 5, …などのように、それより小さい自然数の積で表せない自然数を**素数**という。すなわち、素数は1とその数自身のほかに約数がない数である。ただし、1は素数に入れない。

例題 1

126 を素因数分解しなさい。

解き方 右の計算のように、小さい方の素数から順に商が素数になるまでわっていき、わった素数と商の素数の積をつくる。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 126} \\ 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

答 $2 \times 3^2 \times 7$

問題 1 次の数を素因数分解しなさい。

□(1) 45

□(2) 98

□(3) 132

例題 2

60 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果をある自然数の2乗にしたい。どんな自然数をかければよいですか。また、その結果はどんな自然数の2乗になりますか。

解き方 60 を素因数分解すると、 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

ある自然数の2乗を素因数分解すると、累乗の指数はすべて偶数になるから、60 に3と5をかけると、ある自然数の2乗になる。よって、60 にかける数は $3 \times 5 = 15$ であり、そのとき、

$$60 \times 15 = (2^2 \times 3 \times 5) \times (3 \times 5) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$$

答 15 をかける、30 の2乗

問題 2 63 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果をある自然数の2乗にしたい。どんな自然数□をかければよいですか。

共通因数による因数分解

▶ $(x+5)(x-3)$ を展開すると、 $x^2+2x-15$ になるから、 $x^2+2x-15$ は $(x+5)(x-3)$ と積の形に表すことができる。このとき、整数の場合と同じように、 $x+5$, $x-3$ を $x^2+2x-15$ の**因数**という。

例 $x^2+2x-15$ の因数は、 $x+5$, $x-3$ などである。また、 $7ab$ の因数は、7, a , b , $7a$ などである。

▶ 多項式をいくつかの因数の積として表すことを、その多項式を**因数分解**するという。

$$x^2+2x-15 \xrightleftharpoons[\text{展開}]{\text{因数分解}} (x+5)(x-3)$$

▶ 多項式の各項に共通な因数がある場合、その共通因数をかつこの外にくくり出して、式を因数分解することができる。

$$ma+mb-mc = m(a+b-c)$$

例題 3

次の式を因数分解しなさい。

(1) $5ax+10ay$

(2) $6x^2-9xy+3x$

解き方 (1) 共通因数は $5a$ より、 $5ax+10ay = 5a \times x + 5a \times 2y = 5a(x+2y)$ **答** $5a(x+2y)$

(2) 共通因数は $3x$ より、

$$6x^2-9xy+3x = 3x \times 2x - 3x \times 3y + 3x \times 1 = 3x(2x-3y+1)$$

答 $3x(2x-3y+1)$

問題 3 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $ax+ay$

□(2) $6a-15b$

□(3) $4a^2-2a$

□(4) $ax+bx-4x$

□(5) $3ax+6ay-9a$

□(6) $2x^3-6x^2+8x$

公式による因数分解

乗法公式を逆にみれば、因数分解の公式が得られる。

□(1)' $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

□(2)' $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

□(3)' $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

□(4)' $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

例題 4

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+7x+10$

(2) $x^2-2x-24$

(3) $x^2-4xy+3y^2$

解き方 (1) 公式□(1)'と比べると、 $a+b=7$ 、 $ab=10$ より、和が7で、積が10である2数が a 、 b である。 $2\times 5=10$ 、 $2+5=7$ だから、 $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$ **答** $(x+2)(x+5)$

(2) 積が -24 、和が -2 である2数をさがす。 $24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6$ より考えて、 -6 と4が見つかる。よって、 $x^2-2x-24=(x-6)(x+4)$ **答** $(x-6)(x+4)$

(3) 積が $3y^2$ 、和が $-4y$ となる2つの式をさがす。 $-y$ と $-3y$ が見つかるから、
 $x^2-4xy+3y^2=(x-y)(x-3y)$ **答** $(x-y)(x-3y)$

問題 4 次の式を因数分解しなさい。

□(1) x^2+6x+5

□(2) $x^2+8x+15$

□(3) $x^2+9x+14$

□(4) x^2-5x+6

□(5) x^2-4x+3

□(6) $x^2-10x+16$

□(7) a^2+8a+7

□(8) $y^2-7y+12$

□(9) $m^2-10m+9$

問題 5 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2+2x-15$

□(2) x^2+4x-5

□(3) x^2+x-2

□(4) $x^2-3x-10$

□(5) x^2-6x-7

□(6) x^2-x-6

□(7) $y^2+3y-28$

□(8) a^2-2a-3

□(9) $t^2+5t-14$

問題 6 次の式を因数分解しなさい。

□(1) x^2-9x+8

□(2) $x^2+3x-40$

□(3) x^2-x-30

□(4) $a^2+7a+10$

□(5) x^2-8x-9

□(6) $x^2+2x-35$

□(7) $x^2+2xy-3y^2$

□(8) $x^2-8xy+7y^2$

□(9) $a^2-ab-6b^2$

例題 5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 8x + 16$

(2) $9a^2 - 12ab + 4b^2$

解き方 3つの項のうちの2つの項が2乗の形(x^2 , a^2)になり, 残りの項が $2ax$ で表されるときは, 公式[2]’または[3]’を利用する。(1) x^2 , $16 = 4^2$, また, $8x = 2 \times 4 \times x$ となる。+ $8x$ だから, 公式[2]’を利用する。

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 = (x + 4)^2$$

答 $(x + 4)^2$ (2) $9a^2 = (3a)^2$, $4b^2 = (2b)^2$, また, $12ab = 2 \times 2b \times 3a$ となる。- $12ab$ だから, 公式[3]’を利用する。

$$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2 \times 2b \times 3a + (2b)^2 = (3a - 2b)^2$$

答 $(3a - 2b)^2$ **問題 7** 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2 + 6x + 9$

□(2) $x^2 + 2x + 1$

□(3) $a^2 + 10a + 25$

□(4) $x^2 - 4x + 4$

□(5) $x^2 - 12x + 36$

□(6) $y^2 - 14y + 49$

問題 8 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2 + 16xy + 64y^2$

□(2) $x^2 - 8xy + 16y^2$

□(3) $4a^2 + 4a + 1$

□(4) $25x^2 - 20x + 4$

□(5) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

□(6) $9a^2 + 6ab + b^2$

例題 6

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 49$

(2) $25a^2 - \frac{b^2}{4}$

解き方 項が2つだけの式は, 2乗の差になっていることを確認して, 公式[4]’を利用する。

(1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$

答 $(x + 7)(x - 7)$

(2) $25a^2 - \frac{b^2}{4} = (5a)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(5a + \frac{b}{2}\right)\left(5a - \frac{b}{2}\right)$

答 $\left(5a + \frac{b}{2}\right)\left(5a - \frac{b}{2}\right)$ **問題 9** 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2 - 36$

□(2) $x^2 - 9$

□(3) $x^2 - 1$

□(4) $a^2 - 16$

□(5) $25 - x^2$

□(6) $4 - a^2$

問題 10 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2 - 81y^2$

□(2) $36a^2 - 1$

□(3) $9x^2 - 4y^2$

□(4) $49a^2 - 25b^2$

□(5) $\frac{x^2}{9} - 16$

□(6) $4a^2 - \frac{1}{25}$