

2 次方程式, $ax^2 = b$ の解き方

▶ 移項して整理することにより, $(2 \text{ 次式}) = 0$ の形に変形できる方程式を 2 次方程式という。2 次方程式を成り立たせるような文字の値をその方程式の解といい, 解をすべて求めることをその 2 次方程式を解くという。

▶ 1 次の項がない $ax^2 = b$ の形をした 2 次方程式は, $x^2 = k$ の形に変形して, k の平方根を求めることにより解くことができる。

例題 1

次の方程式を解きなさい。

(1) $2x^2 = 18$

(2) $3x^2 - 15 = 0$

(3) $4x^2 + 5 = 12$

解き方

(1) 両辺を 2 でわって, $x^2 = 9$ より, 9 の平方根を求めて, $x = \pm 3$

答 $x = \pm 3$

(2) -15 を移項して, $3x^2 = 15 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{5}$

答 $x = \pm \sqrt{5}$

(3) 5 を移項して, $4x^2 = 12 - 5 \rightarrow 4x^2 = 7 \rightarrow x^2 = \frac{7}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{4}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

答 $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

問題 1 次の方程式を解きなさい。

□(1) $3x^2 = 75$

□(2) $4x^2 = 8$

□(3) $-2x^2 = -10$

□(4) $x^2 - 16 = 0$

□(5) $x^2 - 1 = 0$

□(6) $x^2 - 7 = 0$

□(7) $5x^2 - 25 = 0$

□(8) $4x^2 - 3 = 0$

□(9) $9x^2 - 1 = 4$

 $(x+m)^2 = n$ の解き方

$(x+m)^2 = n$ の形の方程式は, $x+m$ をひとかたまりにみて, $x+m$ が n の平方根になることから解く。

例題 2

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+2)^2 = 25$

(2) $(x-4)^2 - 6 = 0$

解き方

(1) $x+2$ は 25 の平方根だから,

$$x+2 = \pm 5$$

つまり, $x+2 = 5$, $x+2 = -5$

$$x+2 = 5 \text{ より, } x = 3$$

$$x+2 = -5 \text{ より, } x = -7 \quad \text{答} \quad x = 3, -7$$

(2) 移項して, $(x-4)^2 = 6$

$x-4$ は 6 の平方根だから,

$$x-4 = \pm \sqrt{6}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{6}$$

答 $x = 4 \pm \sqrt{6}$

問題 2 次の方程式を解きなさい。

□(1) $(x+1)^2 = 36$

□(2) $(x-3)^2 = 16$

□(3) $(x+5)^2 = 9$

□(4) $(x-2)^2 = 3$

□(5) $(x+6)^2 = 10$

□(6) $(x-1)^2 = 8$

□(7) $(x+3)^2 - 4 = 0$

□(8) $(x-4)^2 - 20 = 0$

□(9) $(x+2)^2 - 49 = 0$

$(x+m)^2=n$ の形に変形する解き方

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ は、 $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができる。

例題 3

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2+6x-2=0$

(2) $x^2-5x+3=0$

解き方 (1) -2 を移項して、 $x^2+6x=2$

(2) 移項して、 $x^2-5x=-3$

左辺を $(x+m)^2$ の形に変形するために、両辺に

$$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-3+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

x の係数 6 の半分の 2 乗 $\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$ を加えると、

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

$$x^2+6x+9=2+9$$

$$(x+3)^2=11$$

$$x+3=\pm\sqrt{11}$$

$$x=-3\pm\sqrt{11} \quad \text{答} \quad x=-3\pm\sqrt{11}$$

$$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{答} \quad x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

問題 3 次の $\square$ にあてはまる数を求めなさい。

$\square(1) \quad x^2+8x+\square=(x+\square)^2$

$\square(2) \quad x^2+10x+\square=(x+\square)^2$

$\square(3) \quad x^2-4x+\square=(x-\square)^2$

$\square(4) \quad x^2-14x+\square=(x-\square)^2$

問題 4 次の方程式を解きなさい。

$\square(1) \quad x^2+8x=3$

$\square(2) \quad x^2-4x+2=0$

$\square(3) \quad x^2+3x-1=0$

解の公式による解き方

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (解の公式)

参考 [解の公式の導き方] $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例題 4

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2-5x+3=0$

(2) $3x^2+4x-7=0$

解き方 (1) $ax^2+bx+c=0$ で、 $a=1$ 、 $b=-5$ 、 $c=3$ だから、これを解の公式に代入して、

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2} \quad \text{答} \quad x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

(2) 解の公式に $a=3$ 、 $b=4$ 、 $c=-7$ を代入して、

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times3\times(-7)}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{-4\pm10}{6}, \quad \frac{-4+10}{6}=1, \quad \frac{-4-10}{6}=-\frac{7}{3} \quad \text{答} \quad x=1, -\frac{7}{3}$$

問題 5 次の方程式を解きなさい。

$\square(1) \quad x^2+3x-6=0$

$\square(2) \quad 2x^2-5x+2=0$

$\square(3) \quad x^2-4x-3=0$