

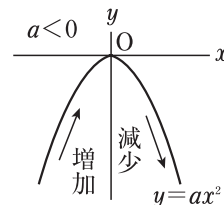
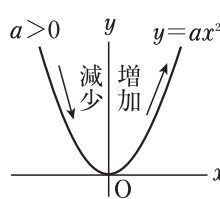
14

関数 $y = ax^2$ の値の変化

関数 $y = ax^2$ の値の増減と変域

▶ 関数 $y = ax^2$ の値の増減については、次の①、②がいえ。

- ① $a > 0$ のとき、 x の値が増加するにつれて、 y の値は、
 $x \leq 0$ で減少、 $x \geq 0$ で増加し、 $x = 0$ で最小値 0 をとる。
- ② $a < 0$ のとき、 x の値が増加するにつれて、 y の値は、
 $x \leq 0$ で増加、 $x \geq 0$ で減少し、 $x = 0$ で最大値 0 をとる。



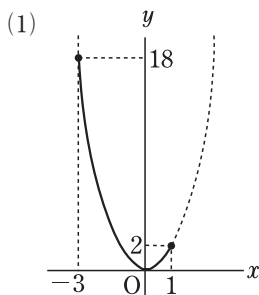
▶ 関数 $y = ax^2$ で、 x の変域に対する y の変域を求めるには、グラフを利用して y の値の増減を考えるとよい。

例題 1

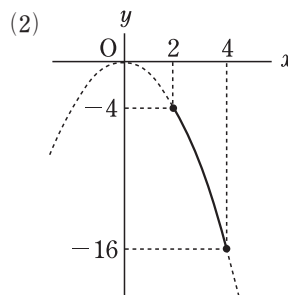
次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = 2x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域を求めなさい。
- (2) 関数 $y = -x^2$ について、 x の変域が $2 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域を求めなさい。

解き方 グラフをかいて、 y の値の増減を確認する。



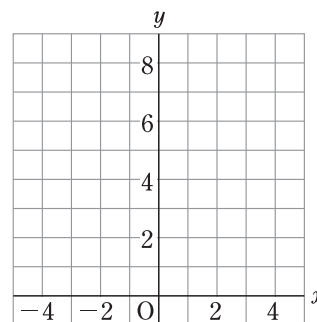
$x = -3$ のとき $y = 18$
 $x = 1$ のとき $y = 2$
 左のグラフから、 y の値は、
 $-3 \leq x \leq 0$ のとき 18 から
 0 まで減少し、 $0 \leq x \leq 1$ の
 とき 0 から 2 まで増加す
 る。 **答** $0 \leq y \leq 18$



$x = 2$ のとき $y = -4$
 $x = 4$ のとき $y = -16$
 左のグラフから、 y の
 値は、 $2 \leq x \leq 4$ におい
 て、 -4 から -16 まで
 減少している。 **答** $-16 \leq y \leq -4$

問題 1 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $x = -2$, $x = 4$ のときの y の値をそれぞれ求めなさい。
- (2) x の変域を $-2 \leq x \leq 4$ としたときのグラフをかきなさい。
- (3) x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。



問題 2 関数 $y = 3x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

- (1) $-2 \leq x \leq 1$
- (2) $-3 \leq x \leq 4$
- (3) $-4 \leq x \leq -1$

問題 3 関数 $y = -2x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

- (1) $-1 \leq x \leq 3$
- (2) $-4 \leq x \leq 2$
- (3) $-5 \leq x \leq 0$

問題 4 次の関数について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域を求めなさい。

- (1) $y = x^2$
- (2) $y = -3x^2$
- (3) $y = -2x + 1$

変化の割合

▶一般に、 x の関数 y について、 x の値が p から q まで増加したときの $\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})}$ の値を、 x の値が p から q まで増加したときの変化の割合という。

❗▶関数 $y = ax^2$ について、 x の値が p から q まで増加したときの変化の割合は、

$$\text{変化の割合} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p} = a(q+p)$$

で求められる。この変化の割合の値は、2点 (p, ap^2) , (q, aq^2) を結ぶ直線の傾きに等しい。

例題 2

関数 $y = 3x^2$ について、 x の値が次のように増加したときの変化の割合を求めなさい。

(1) 2 から 5 まで

(2) -3 から -1 まで

解き方 (1) $x = 2$ のとき、 $y = 3 \times 2^2 = 12$, $x = 5$ のとき、 $y = 3 \times 5^2 = 75$

x の増加量 $= 5 - 2 = 3$, y の増加量 $= 75 - 12 = 63$

$$\text{変化の割合} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{63}{3} = 21$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 2 & 5 \\ \hline y & 12 & 75 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{63} \end{array} \quad \text{答 } 21$$

別解 変化の割合 $= a(q+p) = 3 \times (5+2) = 21$

$$(2) \text{ 変化の割合} = \frac{3 \times (-1)^2 - 3 \times (-3)^2}{(-1) - (-3)} = \frac{3 - 27}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -3 & -1 \\ \hline y & 27 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{-24} \end{array} \quad \text{答 } -12$$

別解 変化の割合 $= a(q+p) = 3 \times \{(-1) + (-3)\} = 3 \times (-4) = -12$

問題 5 関数 $y = 2x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

□(1) 1 から 3 まで

□(2) -4 から -2 まで

□(3) 0 から 5 まで

問題 6 関数 $y = -3x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

□(1) 1 から 4 まで

□(2) -5 から -3 まで

□(3) -4 から 0 まで

問題 7 次の関数について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

□(1) $y = \frac{1}{2}x^2$

□(2) $y = -\frac{3}{2}x^2$

□(3) $y = \frac{1}{3}x^2$