15 関数 $y=ax^2$ の利用

関数 $y=ax^2$ の利用

具体的な事象について，関数 $y=ax^2$ を利用する。与えられた量を x，y とし，関係を式で表して考える。

例題 1

高い所から物を自然に落とすとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，y は x の 2 乗に比例するという。落ち始めてから 2 秒間に落ちる距離が 20 m であるとして，次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) 落ち始めてから 3 秒間に落ちる距離を求めなさい。

(3) 180 m の高さから物を落とすとき，地面に着くのは何秒後ですか。

解き方 (1) y は x の 2 乗に比例するから，求める式を $y=ax^2$ とおく。

2 秒で 20 m 落ちるから，$x=2$ のとき $y=20$ より，これを $y=ax^2$ に代入して，

$20=a\times2^2$，　$a=5$　　よって，$y=5x^2$　　**答** $y=5x^2$

(2) $y=5x^2$ で，$x=3$ のときだから，$y=5\times3^2=45$　　**答** 45 m

(3) $y=180$ となる x を求めればよい。$180=5x^2$。　$x>0$ より，$x=6$　　**答** 6 秒後

問題 1 自動車のブレーキがきき始めてから停止するまでの距離を制動距離といい，制動距離は自動車の速さの 2 乗に比例する。ある自動車が時速 60 km で走っているときの制動距離は 24 m であった。この自動車の時速 x km のときの制動距離を y m とするとき，次の問いに答えなさい。

□(1) y を x の式で表しなさい。

□(2) 時速 90 km のときの制動距離を求めなさい。

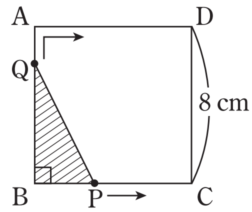
□(3) 制動距離が 6 m になるとき，この自動車の速さを求めなさい。

点や図形の移動と関数

変域ごとに x と y の関係が異なるので，その変域ごとに関数の式やグラフを考える。

例題 2

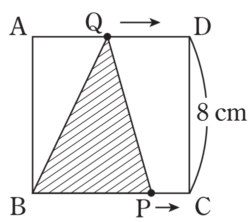
右の図のような 1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD で，点 P，Q は頂点 B を同時に出発し，P は毎秒 1 cm の速さで辺 BC 上を点 C まで動き，Q は毎秒 2 cm の速さで，辺 BA，AD 上を点 D まで動く。P，Q が B を出発してから x 秒後の △QBP の面積を y cm^2 とするとき，次の問いに答えなさい。



(1) 点 Q が辺 BA 上にあるとき，x と y の関係を式で表しなさい。

(2) 点 Q が辺 AD 上にあるときの x の変域をいい，そのときの x と y の関係を式に表しなさい。

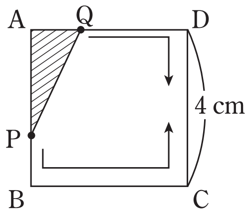
解き方 (1) BQ $=2x$，BP $=x$ より，$y=\dfrac{1}{2}\times x\times2x=x^2$　　**答** $y=x^2$



(2) Q は 4 秒後に A，8 秒後に D に着くから，x の変域は $4\leqq x\leqq8$

また，BP $=x$ で，△QBP は底辺を BP とすると高さは 8 で一定になるから，$y=\dfrac{1}{2}\times x\times8=4x$　　**答** $4\leqq x\leqq8$，$y=4x$

問題2 1辺の長さが4 cmの正方形ABCDがある。点P，Qは頂点Aを同時に出発し，Pは辺AB，BC，CD上を通り，Qは辺AD，DC上を通り，PとQが出会うまで動く。P，Qが同時にAを出発してからx秒後の△APQの面積をy cm²とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，Pの動く速さは毎秒1 cm，Qの動く速さは毎秒$\frac{1}{2}$cmとする。

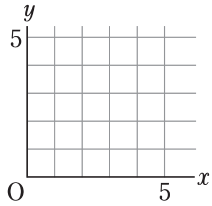


□(1) 点P，Qが頂点Aを同時に出発してから2秒後の△APQの面積を求めなさい。

(2) 点Pが辺AB上にあるとき，次の①～③に答えなさい。

□① xの変域を求めなさい。　□② yをxの式で表しなさい。

□③ 右の図にグラフをかきなさい。

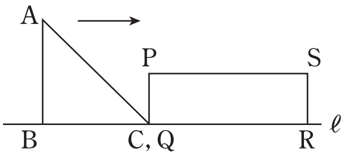


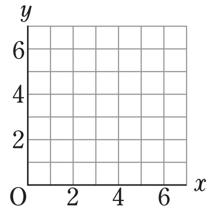
(3) 点Pが辺BC上にあるとき，次の①，②に答えなさい。

□① xの変域を求めなさい。　□② yをxの式で表しなさい。

例題3

右の図のように，直線ℓ上にAB＝BC＝4 cmの直角二等辺三角形ABCとPQ＝2 cm，QR＝6 cmの長方形PQRSがあり，△ABCは直線ℓ上を矢印の方向に毎秒1 cmの速さで進んでいる。点Cが図のように点Qの位置にきたときからx秒後の△ABCと長方形PQRSの重なる部分の面積をy cm²とする。次の問いに答えなさい。



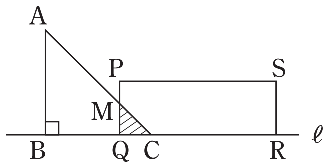


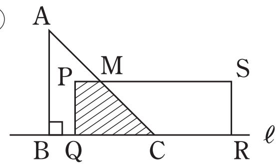
(1) xの変域が次の①～③のとき，xとyの関係をそれぞれ式に表しなさい。

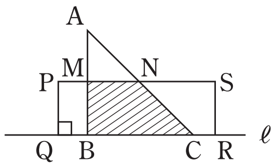
① $0 \leqq x \leqq 2$　② $2 \leqq x \leqq 4$　③ $4 \leqq x \leqq 6$

(2) 点Cが点Qの位置から点Rの位置まで移動するときのxとyの関係をグラフに表しなさい。

解き方 (1) 重なる部分は，それぞれ下の図の斜線部分になる。

①


②


③


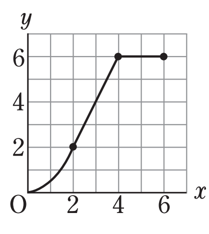
① 重なる部分は，MQ＝CQ＝xの直角二等辺三角形。$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$　**答** $y=\frac{1}{2}x^2$

② 重なる部分は，PM＝$x-2$，QC＝x，高さ2の台形。

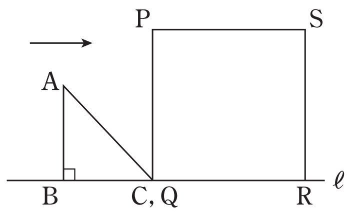
$y=\frac{1}{2}\times\{(x-2)+x\}\times 2=2x-2$　**答** $y=2x-2$

③ 重なる部分は，MN＝2，BC＝4，高さ2の台形で，yの値は一定になる。　$y=\frac{1}{2}\times(2+4)\times 2=6$　**答** $y=6$

(2) 変域に注意して，$0 \leqq x \leqq 6$のグラフをかく。　**答** 右図



問題 3 右の図のように，直線 ℓ 上に直角をはさむ 2 辺が 6 cm の直角二等辺三角形 ABC と 1 辺が 10 cm の正方形 PQRS があり，△ABC は直線 ℓ 上を毎秒 2 cm の速さで矢印の方向に進んでいる。点 C が図のように点 Q の位置にきたときから x 秒後の △ABC と正方形 PQRS の重なる部分の面積を y cm² とする。次の問いに答えなさい。



□(1) $x=2$ のときの y の値を求めなさい。

□(2) $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。

□(3) $3 \leqq x \leqq 5$ のときの y を求めなさい。

グラフが階段状の線分になる関数

階段状の線分のグラフでは，端の点がどちらの線分に入るかに気をつける。
（—●…右端の点を含む，—○…右端の点を含まない）

例題 4

右の表は，ある宅配便の料金表である。届ける荷物 x g の料金を y 円とするとき，次の問いに答えなさい。

重さ	50 g まで	100 g まで	150 g まで	250 g まで	500 g まで
料金	120 円	140 円	200 円	240 円	390 円

(1) $x=250$ のときの y の値を答えなさい。　(2) y は x の関数といえるか答えなさい。

(3) x と y の関係をグラフに表しなさい。

解き方 (1) 重さが 250 g のときで，「250 g まで」の欄より，料金は 240 円。　**答** $y=240$

(2) x の値を決めるとそれに対応する y の値がただ 1 つだけ決まるから，y は x の関数である。

答 関数といえる。

(3) $0 < x \leqq 50$ のとき，$y=120$

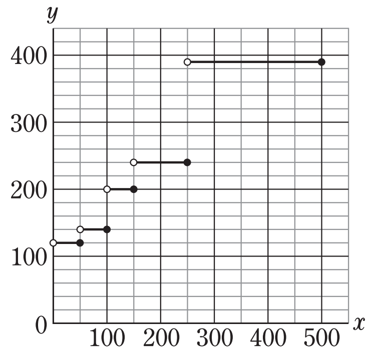
$50 < x \leqq 100$ のとき，$y=140$

$100 < x \leqq 150$ のとき，$y=200$

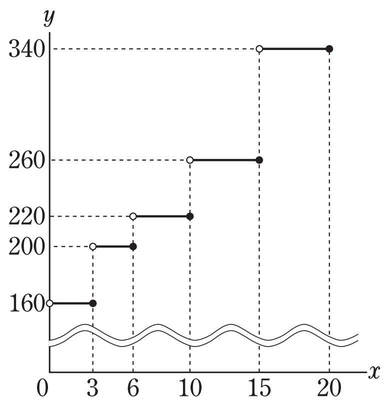
$150 < x \leqq 250$ のとき，$y=240$

$250 < x \leqq 500$ のとき，$y=390$

x の変域に注意し，端の点を含むときは ●，端の点を含まないときは ○ で表すことに気をつけて，階段状の線分のグラフをかく。　**答** 右図



問題 4 右の図は，ある鉄道の旅客運賃表をグラフにしたもので，距離が x km のときの運賃を y 円としている。次の問いに答えなさい。



□(1) 距離が 8.9 km である 2 駅間の運賃を答えなさい。

□(2) $x=15$ のときの y の値を答えなさい。

□(3) $y=200$ となる x の値の範囲を不等号を用いて表しなさい。

□(4) $0 < x \leqq 10$ のときの y の値をすべて答えなさい。