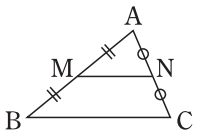
19 中点連結定理

中点連結定理

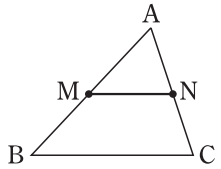
△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき，

MN∥BC，$MN=\frac{1}{2}BC$ （中点連結定理）



例題 1

右の図の △ABC で，辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき，次の問いに答えなさい。



(1) MN ∥ BC，$MN=\frac{1}{2}BC$ であることを証明しなさい。

(2) 辺 BC の中点を P とする。AB＝10 cm のとき，NP の長さを求めなさい。

解き方 (1) 三角形と比の定理を利用して証明する。

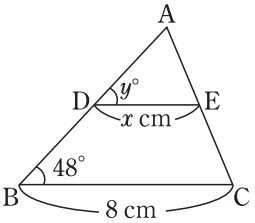
答 △ABC で，M，N はそれぞれ辺 AB，AC の中点だから，AM：AB＝AN：AC＝1：2

よって，MN ∥ BC。また，MN：BC＝AM：AB＝1：2 より，2MN＝BC。よって，$MN=\frac{1}{2}BC$

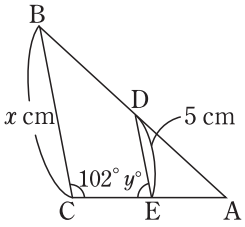
(2) N，P はそれぞれ辺 CA，CB の中点だから，$NP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$ **答** 5 cm

問題 1 右の図で，点 D，E がそれぞれ △ABC の辺 AB，AC の中点であるとき，x，y の値を求めなさい。

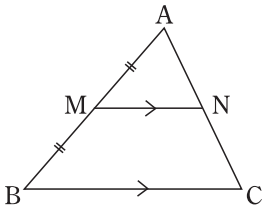
□(1)



□(2)



問題 2 △ABC の辺 AB の中点を M とし，M から辺 BC に平行な直線をひいて辺 AC との交点を N とするとき，次の問いに答えなさい。

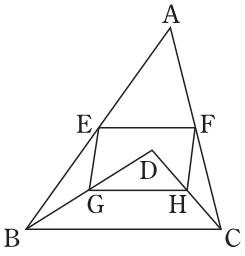


□(1) AN：NC を求めなさい。

□(2) BC＝7 cm のとき，MN の長さを求めなさい。

例題 2

右の図のように，底辺 BC が共通な △ABC と △DBC において，辺 AB，AC，DB，DC の中点をそれぞれ E，F，G，H とするとき，四角形 EGHF は平行四辺形であることを証明しなさい。



解き方 △ABC と △DBC にそれぞれ中点連結定理を用いる。

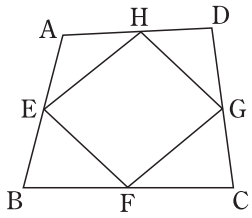
答 △ABC で，中点連結定理より，EF ∥ BC，$EF=\frac{1}{2}BC$ …①

△DBC で，中点連結定理より，GH ∥ BC，$GH=\frac{1}{2}BC$ …②

①，②より，EF ∥ GH，EF＝GH

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 EGHF は平行四辺形である。

問題 3 四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G，H とするとき，次の問いに答えなさい。



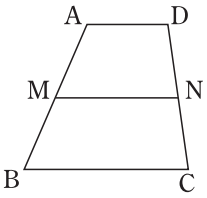
□(1)　四角形 EFGH が平行四辺形であることを証明しなさい。

(2)　四角形 EFGH が次の①，②のような図形になるとき，四角形 ABCD の対角線 AC と BD の間にはどのような関係があるか，式で答えなさい。

□①　ひし形　　□②　長方形

例題 3

AD ∥ BC の台形 ABCD で，辺 AB，DC の中点をそれぞれ M，N とするとき，MN ∥ BC，$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$ であることを証明しなさい。



解き方　直線 AN と辺 BC の延長との交点を E として，AD＝CE，AN＝NE を証明し，△ABE に中点連結定理を用いる。

答　直線 AN と辺 BC の延長との交点を E とする。△AND と △ENC において，

DN＝CN …①，∠AND＝∠ENC …②，AD ∥ BE より，∠ADN＝∠ECN …③

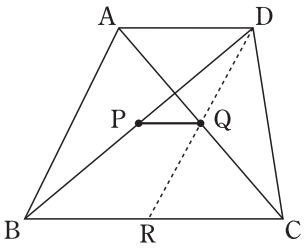
①，②，③より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，△AND ≡ △ENC

よって，AD＝CE，AN＝NE

△ABE で，M，N はそれぞれ辺 AB，AE の中点だから，MN ∥ BE。すなわち，MN ∥ BC

また，$MN=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(BC+CE)=\frac{1}{2}(BC+AD)$。すなわち，$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$

問題 4　AD ∥ BC，AD ＜ BC の台形 ABCD で，対角線 BD，AC の中点をそれぞれ P，Q とするとき，PQ ∥ BC，$PQ=\frac{1}{2}(BC-AD)$ であることを次のように証明した。［　　］にあてはまるものを答えなさい。



〈証明〉　直線 DQ と辺 BC との交点を R とする。△AQD と △CQR において，［　(1)　］…①　　∠AQD＝［　(2)　］…②

AD ∥ BC より，［　(3)　］…③

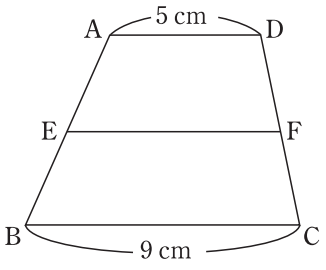
①，②，③より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，△AQD ≡ △CQR

よって，DQ＝［　(4)　］，AD＝［　(5)　］

△DBR で，P，Q は辺 DB，DR の中点だから，［　(6)　］∥ BR。すなわち，PQ ∥ BC

また，$PQ=\frac{1}{2}$［　(7)　］$=\frac{1}{2}(BC-$［　(8)　］$)=\frac{1}{2}(BC-AD)$

問題 5　右の図のような AD ∥ BC の台形 ABCD で，辺 AB，DC の中点をそれぞれ E，F とするとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　EF の長さを求めなさい。

□(2)　対角線 BD と EF の交点を G とするとき，DG：DB を求めなさい。