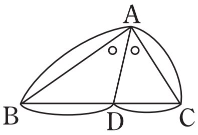
20 相似の応用

角の二等分線と線分の比

△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，

AB：AC＝BD：DC

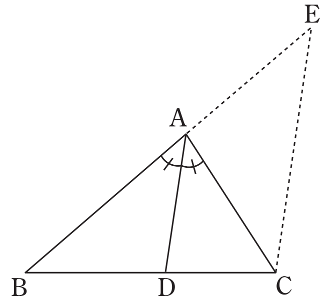


例題 1

△ABC で，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) AB＝AC＝BD：DC であることを，右の図のように，BA の延長と C を通り AD に平行な直線との交点を E として，証明しなさい。

(2) AB＝12，BC＝14，CA＝9 のとき，BD の長さを求めなさい。



解き方 (1) △ACE が二等辺三角形になることに注目する。

答 AD∥CE だから，∠BAD＝∠AEC，∠CAD＝∠ACE

仮定より，∠BAD＝∠CAD　　よって，∠AEC＝∠ACE

△ACE は 2 角が等しいから二等辺三角形になるので，AC＝AE …①

また，△BCE で，AD∥EC より，BA：AE＝BD：DC …②

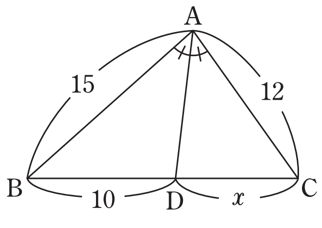
①，②より，AB：AC＝BD：DC

(2) (1)より，BD：DC＝AB：AC＝12：9＝4：3

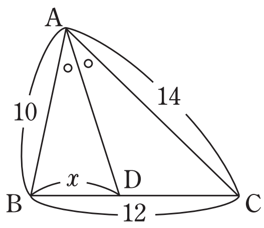
よって，BD：BC＝4：(4＋3)＝4：7，　BD：14＝4：7，　BD＝8　　**答** 8

問題 1 下の図の △ABC で，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，x の値を求めなさい。

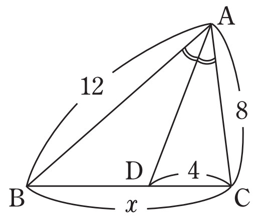
□(1)



□(2)



□(3)

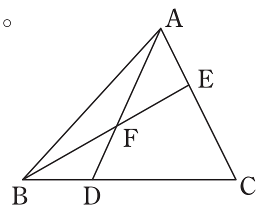


線分比の移動

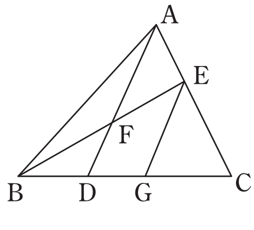
適当な平行線などをひいて，相似な三角形をつくり，線分の比を他の線分の比に移して考える。

例題 2

右の図で，BD：DC＝1：2，AE：EC＝2：3 のとき，BF：FE を求めなさい。



解き方 下の図のように，E を通り線分 AD に平行な直線をひき，BC との交点を G として，三角形と比の定理を使う。



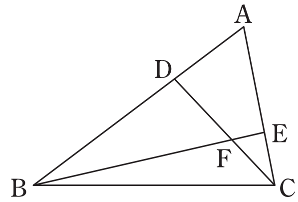
△CAD で，DG：GC＝AE：EC＝2：3

DG：DC＝2：(2＋3)＝2：5 より，DG＝$\frac{2}{5}$DC

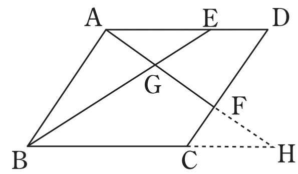
また，BD：DC＝1：2 より，BD＝$\frac{1}{2}$DC

よって，△BGE で，BF：FE＝BD：DG＝$\frac{1}{2}$DC：$\frac{2}{5}$DC＝5：4　**答** 5：4

問題 2 右の図のように，△ABC の辺 AB 上に AD：DB＝1：2 となる点 D，
□辺 AC 上に AE：EC＝2：1 となる点 E をとる。BE と CD の交点を F とするとき，BF：FE を求めなさい。



問題 3 右の図のように，▱ABCD の辺 AD 上に AE：ED＝2：1 となる点 E，辺 CD 上に CF：FD＝1：2 となる点 F をとり，BE と AF の交点を G とする。このとき，BG：GE を次の⑴～⑶にしたがって求めなさい。



□⑴ AF の延長と辺 BC の延長との交点を H とするとき，AD：CH を求めなさい。

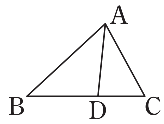
□⑵ AE，BH の長さはそれぞれ AD の長さの何倍か，求めなさい。

□⑶ BG：GE を求めなさい。

辺の比と面積の比

高さが共通な 2 つの三角形の面積の比は，底辺の長さの比に等しい。
右の図のように，△ABC の辺 BC 上に点 D をとるとき，

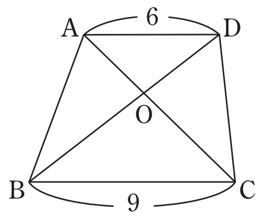
△ABD：△ADC＝BD：DC （△ABD：△ABC＝BD：BCも成り立つ）



例題 3

右の図のような AD∥BC，AD＝6，BC＝9 である台形 ABCD で，対角線 AC と BD の交点を O とするとき，次の問いに答えなさい。

⑴ △ABO と △BCO の面積の比を求めなさい。
⑵ △DBC の面積は △ABO の面積の何倍か，求めなさい。



解き方 ⑴ △AOD∽△COB より，AO：CO＝AD：BC＝6：9＝2：3
△ABO と △BCO は，底辺を AO，CO とみると高さは共通だから，
△ABO：△BCO＝AO：CO＝2：3

答 2：3

⑵ BO：OD＝3：2 より，BO：BD＝3：(3＋2)＝3：5

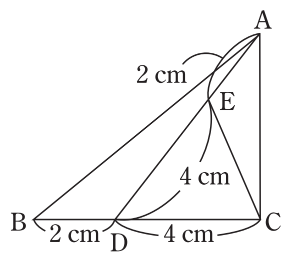
△BCO：△DBC＝BO：BD＝3：5 より，$\triangle DBC=\frac{5}{3}\triangle BCO$

⑴より，△ABO：△BCO＝2：3 だから，$\triangle BCO=\frac{3}{2}\triangle ABO$

よって，$\triangle DBC=\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}\triangle ABO=\frac{5}{2}\triangle ABO$

答 $\frac{5}{2}$ 倍

問題 4 右の図について，次の問いに答えなさい。

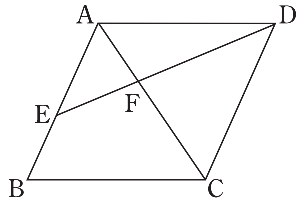


□⑴ △AEC と △EDC の面積の比を求めなさい。

□⑵ △ADC と △ABC の面積の比を求めなさい。

□⑶ △AEC と △ABC の面積の比を求めなさい。

問題 5 ▱ABCD の辺 AB 上に AE：EB＝4：3 となる点 E をとり，対角線 AC と線分 DE との交点を F とする。このとき，次の問いに答えなさい。



□(1) AF：FC を求めなさい。

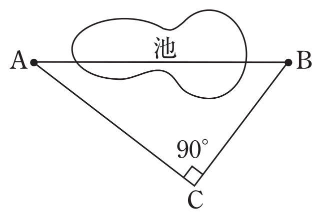
□(2) △AFD と △ACD の面積の比を求めなさい。

縮図

直接には測ることができない 2 地点間の距離や建物の高さなどは，縮図をかき，相似を利用して求める方法がある。

例題 4

池をはさんだ 2 地点 A，B 間の距離を求めるために，C 地点で A，B までの距離と ∠C の大きさを測ったら，AC＝24 m，BC＝18 m，∠C＝90° となった。この結果をもとに 600 分の 1 の縮図をかくと，AB に対応する部分の長さは 5 cm になった。2 地点 A，B 間の距離を求めなさい。



解き方 600 分の 1 の縮図だから，実際の長さは 600 倍になる。

5 cm×600＝3000 cm＝30 m　　**答** 約 30 m

問題 6 ある木の高さを求めるのに，下の図 1 のように，木から 9 m 離れた地点に立ち，そこから木の
□先端を見たら，水平方向に対して 30° 上に見えた。目の高さ BA は 1.5 m である。この木の高さを 200 分の 1 の縮図をかいて求める途中の図が図 2 である。図 2 を完成して，この木の高さを求めなさい。

図 1

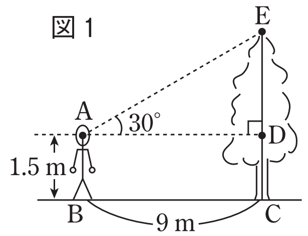
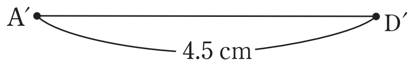


図 2

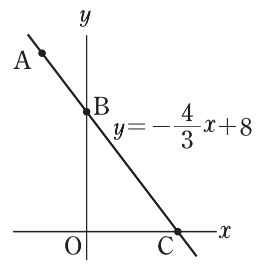


座標と相似

座標平面上の線分の比は，x 座標の差の比か y 座標の差の比で表される。

例題 5

右の図のように，直線 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 上に点 A$(-3,\ 12)$，B$(0,\ 8)$，C$(6,\ 0)$ がある。次の問いに答えなさい。



(1) AB：BC を求めなさい。

(2) 線分 AC 上に AP：PC＝2：1 となる点 P をとる。P の座標を求めなさい。

解き方 (1) A から x 軸に垂線 AH をひく。

AB：BC＝HO：OC＝$\{0-(-3)\}:(6-0)=3:6=1:2$　　**答** 1：2

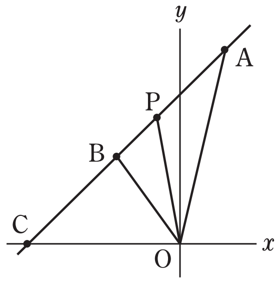
別解 A から y 軸に垂線 AK をひく。AB：BC＝KB：BO＝$(12-8):(8-0)=4:8=1:2$

(2) P$(p,\ q)$ とする。x 座標について，$\{p-(-3)\}:(6-p)=2:1$，$p+3=2(6-p)$，$p=3$

y 座標について，$(12-q):(q-0)=2:1$，$12-q=2q$，$q=4$　　**答** $(3,\ 4)$

別解 P は $y=-\frac{4}{3}x+8$ 上の点だから，y 座標は $y=-\frac{4}{3}\times3+8=4$ と求めてもよい。

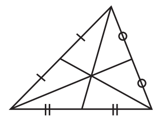
問題7 右の図のように，2点 A(2，9)，B(−3，4) がある。次の問いに答えなさい。



□(1) 直線 AB と x 軸との交点を C とするとき，AB：BC を求めなさい。

□(2) 線分 AB 上に点 P をとる。△OAP と △OBP の面積の比が 3：2 のとき，点 P の座標を求めなさい。

三角形の重心



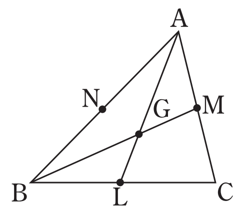
▶三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を**中線**という。

▶三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，その交点を**重心**という。

三角形の重心は，それぞれの中線を 2：1 の比に分ける。

例題6

右の図のように，△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とし，AL と BM の交点を G とする。次の問いに答えなさい。

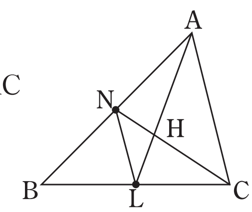


(1) 線分 CN が点 G を通ることを証明しなさい。

(2) CN＝15 cm のとき，CG の長さを求めなさい。

解き方 (1) **答** △CAB で，M，L は辺 CA，CB の中点だから，中点連結定理より，ML // AB, ML＝$\frac{1}{2}$AB。よって，AG：GL＝AB：ML＝AB：$\frac{1}{2}$AB＝2：1 …①

また，右の図のように，AL と CN の交点を H とする。



△BCA で，L，N は辺 BC，BA の中点だから，LN // AC，LN＝$\frac{1}{2}$AC

よって，AH：HL＝AC：LN＝AC：$\frac{1}{2}$AC＝2：1 …②

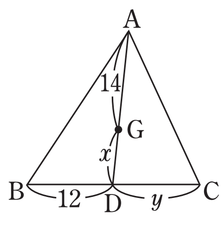
①，②より，点 G と H は一致するから，線分 CN は点 G を通る。

(2) G は △ABC の重心だから，CG：GN＝2：1 より，CG：CN＝2：(2＋1)＝2：3

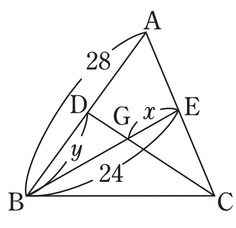
よって，CG：15＝2：3，　3CG＝30，　CG＝10 **答** 10 cm

問題8 次の図で，G が △ABC の重心であるとき，x，y の値を求めなさい。

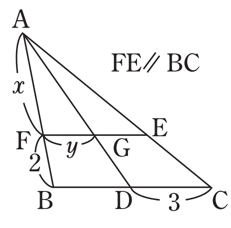
□(1)



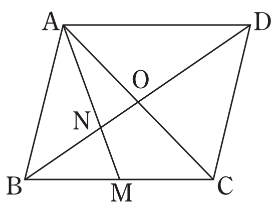
□(2)



□(3)



問題9 右の図のように，▱ABCD の対角線 AC，BD の交点を O とする。辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を N とするとき，次の問いに答えなさい。



□(1) AN：NM を求めなさい。

□(2) ▱ABCD の面積は △NBM の面積の何倍か，求めなさい。